Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2018

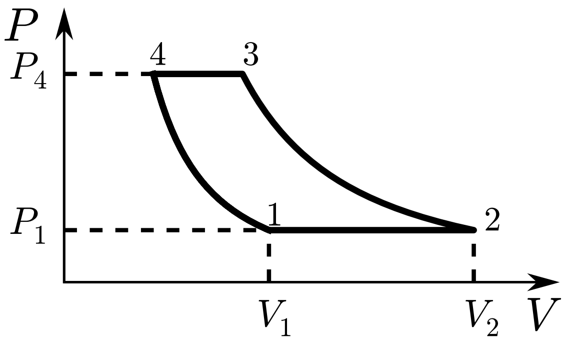
Mecânica Estatística

07/03/2018 - 09:00 às 12:00 h

(Escolha três dentre as quatro questões)

Questão 1: Termodinâmica

Usando n mols de um gás ideal monatômico, um refrigerador opera em um ciclo de Brayton (dois processos isobáricos intercalados por dois adiabáticos, como mostra a figura). Antes da compressão adiabática, o gás ocupa o volume V_2 na pressão P_1. Seu volume ao final da expansão adiabática é V_1.



(a) **(30%)** Calcule o valor absoluto do calor trocado pelo gás no processo isobárico a P_4.

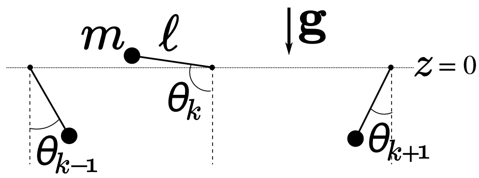
(b) **(30%)** Calcule o valor absoluto do calor trocado pelo gás no processo isobárico a P_1.

(c) **(20%)** Calcule o trabalho realizado sobre o gás ao final de um ciclo.

(d) **(20%)** Mantendo-se P_1, V_1 e V_2, o que deve ser feito para aumentar o rendimento desse refrigerador? Justifique sua resposta.

Questão 2: Ensemble Canônico Clássico

Considere um conjunto de N pêndulos simples ($N \gg 1$), não interagentes, cada um de comprimento ℓ e massa m, que podem oscilar livremente no plano do papel em torno de seus pontos de fixação, como mostra a figura. O sistema está em contato com um meio na temperatura T e sujeito ao campo gravitacional $\mathbf{g} = -g\hat{z}$, onde g é constante. Os pontos de fixação de todos os pêndulos se encontram no plano $z = 0$ e estão afastados entre si por distâncias maiores do que 2ℓ. Considere o potencial gravitacional igual a zero em $z = 0$.



(a) (30%) Calcule a função de partição Z do sistema no *ensemble* canônico.

(b) (30%) Obtenha a energia interna U do sistema.

(c) (20%) Determine a dependência com a temperatura da energia interna por oscilador, U/N, para $0 < k_B T \ll mg\ell$. O resultado encontrado é esperado? Justifique.

(d) (20%) Calcule U/N para $k_B T \gg mg\ell$ como uma expansão em termos de $mg\ell/k_B T$. O resultado é consistente com o que você espera? Justifique.

Dados:

$$\int_0^\pi d\theta\, e^{t\cos\theta} = \pi I_0(t), \qquad \frac{dI_0(t)}{dt} = I_1(t)$$

$$I_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \quad \text{para } n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,$$

$$I_n(t) \sim \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}}\left[1 - \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{2t\,\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right], \qquad \text{para } t \gg 1 \qquad \text{e} \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-at^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Questão 3: Gás ideal de bósons d-dimensional

Considere um gás de bósons não-interagentes com um espectro de energia $\varepsilon = p^2/2m$ e *spin* zero, contido em uma caixa de "volume" $V = L^d$, onde d é um número inteiro positivo.

(a) (30%) Mostre que o grande potential $\Phi = -k_B T \ln \mathcal{Z}$, onde $\mathcal{Z}$ é a grande função de partição do sistema, obedece à relação

$$\frac{\Phi}{k_B T} = -\left(\frac{L}{\lambda_T}\right)^d g_{\frac{d}{2}+1}(z) + \ln(1-z),$$

onde $z = e^{\mu/k_B T}$, μ é o potencial químico, $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$, e a função $g_w(z)$ é dada por

$$g_w(z) = \frac{1}{\Gamma(w)} \int_0^\infty \frac{x^{w-1}}{z^{-1}e^x - 1}\, dx,$$

onde $\Gamma(w)$ é a função gama.

Sugestão: Use integração por partes na expressão de $\ln \mathcal{Z}$.

(b) (30%) Calcule a densidade $n = N/V$ no limite termodinâmico. Expresse sua resposta em termos de d, λ_T, V e z.

(c) (40%) Calcule a razão $\dfrac{PV}{U}$, onde P é a pressão e U a energia interna. Compare seu resultado com o valor correspondente do gás ideal clássico.

Dados:

$$\Gamma(w+1) = w\Gamma(w); \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi};$$

$$\sum_i \underset{V\to\infty}{\longrightarrow} \frac{V}{(2\pi)^d} \int d^d k;$$

$$\int d^d k = S_d \int k^{d-1}\, dk, \quad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Questão 4: Sistemas Interagentes

Um sólido é constituído por N átomos, onde em cada átomo a camada eletrônica não compensada possui momento magnético de módulo μ com *spin* 1/2. A interação dos elétrons com um campo magnético externo H contribui, portanto, com uma energia $\mp\mu H$.

(a) (30%) Se os elétrons não interagem entre si, mostre que a magnetização do sistema é dada por

$$M = N\mu \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right).$$

No caso em que há interação de intercâmbio entre primeiros vizinhos, na *aproximação de campo médio* para o ferromagnetismo supomos que em cada sítio do sólido há um campo magnético efetivo $H_{ef} = H + \lambda M$, onde λ é uma constante positiva.

(b) (30%) Utilizando esta aproximação no resultado do item (a), analise graficamente as possíveis soluções para M e mostre que o sistema exibe magnetização espontânea (para $H = 0$) abaixo de uma temperatura de transição T_c. Obtenha T_c em termos das constantes dadas.

(c) (20%) Mostre que em $H = 0$ e para $0 < T_c - T \ll T_c$

$$\frac{M}{N\mu} \approx \sqrt{3\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}.$$

(d) (20%) Calcule a susceptibilidade magnética $\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{H=0}$ para $T = T_c + \Delta T$, para o caso $\Delta T > 0$, tomando o limite $\Delta T \to 0$ (lei de *Curie-Weiss*).

Dados:

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots$$